Homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$:

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer que l'exponentielle matricielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Théorème 1 : [Rombaldi, p.771 + 780]
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Preuve :
$*$ Montrons que l'exponentielle matricielle est bien définie dans ce cadre :
Soit $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.
Par le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $H = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^*$. On a ainsi par continuité du produit matriciel que $e^H = P\,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}\right)P^*$ et comme $P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et que $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ on a ainsi $\left(e^H\right)^* = (P^*)^*\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^* P^* = e^H$.
Ainsi, l'exponentielle matricielle est bien définie dans ce cadre.
$*$ Montrons que l'application est surjective :
Soit $B \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.
Par le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $B = P\,\mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)P^*$. De plus, puisque les μ_i sont strictement positifs, la matrice $A = P\,\mathrm{diag}(\ln(\mu_1), ..., \ln(\mu_n))P^*$ est bien définie et appartient à $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ puisque $P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.
Enfin, on obtient $e^A = B$, donc l'application est bien surjective.

$*$ Montrons que l'application est injective :
Soient $A, A' \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ telles que $e^A = e^{A'}$.
En notant $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$, on obtient par le théorème d'interpolation de Lagrange qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1;r]\!]$ on ait $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. On a donc :

$$Q\left(e^A\right) = P\,\mathrm{diag}\left(Q\left(e^{\lambda_1}\right), ..., Q\left(e^{\lambda_n}\right)\right)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1} = A$$

Or, la matrice A' commute avec $Q\left(e^{A'}\right) = Q\left(e^A\right) = A$ (car polynôme en A'), donc elles sont co-diagonalisables. Il existe donc $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = P_0\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P_0^{-1} \text{ et } A' = P_0\,\mathrm{diag}(\lambda'_1, ..., \lambda'_n)P_0^{-1}$$

On a donc pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $e^{\lambda_i} = e^{\lambda'_i}$ et donc par injectivité de l'exponentielle réelle on a $\lambda_i = \lambda'_i$, donc $A = A'$ et ainsi l'application est injective.

$*$ Montrons que l'application est bicontinue :
On sait déjà que l'application est continue en tant que restriction d'une application continue. Il nous faut juste montrer la continuité de l'application réciproque.

Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ pour la norme $|||\cdot|||_2$.
Par surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ une matrice $A_k \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^{A_k} = B_k$ et $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^A = B$.

Or, les suites $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(B_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent pour la norme $|||\cdot|||_2$ (par continuité de l'application $X \longmapsto X^{-1}$). Ainsi, elles sont bornées pour la norme $|||\cdot|||_2$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|||B_k|||_2 \leq C$ et $\left|\left|\left|B_k^{-1}\right|\right|\right|_2 \leq C$. On a alors $\rho(B_k) \leq C$ et $\rho\left(B_k^{-1}\right) \leq C$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{C} \leq \rho(B_k) \leq C$ et donc puisque les A_k ont pour valeurs propres les logarithmes népériens de celles des B_k, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \rho(A_k) \in [-\ln(C); \ln(C)]$$

Ainsi, on a $\left(|||A_k|||_2\right)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [-\ln(C); \ln(C)]$ qui est compact. Donc la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $|||\cdot|||_2$ et donc il existe une sous-suite $\left(A_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi, par continuité de l'exponentielle, on a $\exp(A') = B = \exp(A)$ et par injectivité de l'exponentielle de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ on a finalement $A = A'$. La suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $|||\cdot|||_2$ et a pour unique valeur d'adhérence la matrice A, donc la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A pour la norme $|||\cdot|||_2$.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans la preuve, on a utilisé un résultat sur a norme subordonnée qui lui-même repose sur la décomposition polaire dans $\mathbb{C}$ dont on rappelle l'énoncé et la démonstration ainsi que quelques résultats préliminaires et corollaires :

Lemme 2 : Lemme de la racine carré [Rombaldi, p.739]
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Preuve :
Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
$*$ Existence :
La matrice A étant symétrique et positive, elle a toutes ses valeurs propres réelles et positives et est diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral). Il existe donc $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $A = P\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^\intercal$.

En posant la matrice $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta P^\intercal$, on a alors $B^2 = A$ et la matrice B est symétrique positive (car ses valeurs propres sont positives).

$*$ Unicité :
Remarquons d'abord que si φ est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $\varphi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$, alors le degré de φ est égal à $p-1$ (avec p le nombre de valeurs propres distinctes de A) et $\varphi(A) = P\varphi(D)P^\intercal = P\Delta P^\intercal = B$ (autrement dit, B est polynomiale en A).

Soit C une autre racine carrée de A symétrique et positive.
On a alors $C^2 = A$ et donc C commute avec A et donc avec B (car B polynomiale en A). Ainsi, les matrices B et C commutent et sont symétriques, elles sont alors co-diagonalisables dans une base orthonormée. Il existe donc $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $C = Q\Gamma Q^\intercal$ et $B = Q\Lambda Q^\intercal$ avec Γ et Λ diagonales et à coefficients positifs.

De l'égalité $C^2 = A = B^2$, on tire $\Gamma^2 = \Lambda^2$ et donc $\Gamma = \Lambda$ (car Γ et Λ sont diagonales et à coefficients positifs) et ainsi $B = C$.

■

Remarque 3 : [Rombaldi, p.740]
Avec les notations du théorème, on dit que B est la **racine carrée positive de** $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Cette racine carrée positive est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Dans la démonstration ci-dessus, on a vu que B est polynomiale en A. En notant $B_1, ..., B_n$ les colonnes de la matrice B, on a que la ligne i de B est $B_i^\intercal$ (car B est symétrique) et l'égalité $B^2 = A$ se traduit par :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!],\ a_{i,j} = B_i^\intercal B_j = < B_i; B_j >$$

Ceci signifie que A est une matrice de Gram. On a alors le résultat suivant : toute matrice symétrique positive est une matrice de Gram.

Remarque 4 : [Rombaldi, p.740]
On montre de manière analogue que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors pour tout entier $p > 0$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^p$ (de plus, si A est définie positive, alors il en est de même pour B).

Théorème 5 : Décomposition polaire [Rombaldi, p.740] :
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve :
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
$*$ Existence :
La matrice $A^\intercal A$ est symétrique et définie positive (car pour tout x non nul on a $< A^\intercal Ax; x >= \|Ax\|^2 > 0$) et donc par le lemme de la racine carrée, il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^\intercal A$. On pose alors $\Omega = AS^{-1}$ et on a :

$$A = \Omega S \text{ et } \Omega^\intercal\Omega = \left(S^{-1}\right)^\intercal (A^\intercal A)\, S^{-1} = (S^\intercal)^{-1} S^2 S^{-1} = S^{-1}S = I_n$$

$*$ Unicité :
Si $A = \Omega S$, alors $A^\intercal A = S\Omega^\intercal\Omega S = S^2$, avec S la racine carrée positive de la matrice symétrique définie positive $A^\intercal A$. La matrice Ω est alors donnée par $\Omega = AS^{-1}$ (A inversible entraîne S inversible).

Finalement, on a donc démontré la décomposition polaire.

■

De la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut en déduire une généralisation à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du théorème précédent. Pour ce faire on a besoin du lemme suivant :

Lemme 6 : [Rombaldi, p.741]
L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Preuve :
On munit l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle $\|\cdot\|$ induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

$*$ Du fait qu'une transformation orthogonale conserve la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, on en déduit que pour toute matrice orthogonale A, on a $\|A\| = 1$ et donc que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

$*$ De plus, cet ensemble est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $A \longmapsto A^\intercal A$.

Ainsi, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

■

Théorème 7 : [Rombaldi, p.741]
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Preuve :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$. Par le théorème de la décomposition polaire, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $A_k = \Omega_k S_k$, avec $\Omega_k \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Or la suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, donc on peut en extraire une sous-suite $\left(\Omega_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. De la relation $S_k = \Omega_k^{-1} A_k = \Omega^\intercal A$ et de la continuité du produit matriciel, on en déduit que la sous-suite $\left(S_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est également convergente vers $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et on a donc $A = \Omega S$.

■

Remarque 8 : [Rombaldi, p.741]
Si A est de rang $r < n$, alors la décomposition précédente n'est pas unique ! En effet, on peut diagonaliser la matrice symétrique positive S dans une base orthonormée $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ avec $Se_i = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i = 0$ pour $i \in [\![1; n-r]\!]$ et $\lambda_i > 0$ sinon (si A n'est pas inversible, alors il en est de même pour S et 0 est valeur propre de S). Les Ωe_i sont alors uniquement déterminés pour $i \in [\![n-r+1; n]\!]$ mais il n'y a pas unicité pour $i \in [\![1; n-r]\!]$.

Le théorème de décomposition polaire des matrices inversibles peut s'exprimer comme suit en utilisant la compacité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$:

Théorème 9 : [Rombaldi, p.741]
L'application :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega, S) & \longmapsto & \Omega S \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

Preuve :
$*$ On sait déjà que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. L'application Ψ est alors une bijection de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

$*$ L'application Ψ est continue car ses composantes sont des fonctions polynomiales des coefficients de Ω et de S.

$*$ Montrons que Ψ^{-1} est continue :
Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\Psi^{-1}(A_k) = (\Omega_k, S_k)$ et $\Psi^{-1}(A) = (\Omega, S)$. La suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, donc on peut en extraire une sous-suite $\left(\Omega_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $\Omega' \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. De la relation $S_k = \Omega^\intercal A$ et de la continuité du produit matriciel, on en déduit que la sous-suite $\left(S_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est également convergente vers $S' = \Omega'^\intercal A$.

La matrice S' est symétrique positive (en tant que limite d'une suite de matrices symétriques positives) et elle est définie puisque inversible. On a alors la décomposition polaire $A = \Omega' S'$ et par unicité on a en particulier que $\Omega' = \Omega$. Ainsi, la suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence dans le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et ainsi elle converge vers Ω.

Par conséquent, la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\Omega_k^\intercal A_k)$ converge vers $\Omega^\intercal A = S$. C'est-à-dire que la suite $((\Omega_k, S_k))_{k\in\mathbb{N}} = \left(\Psi^{-1}(A_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\Omega, S) = \Psi^{-1}(A)$ et ainsi Ψ^{-1} est continue.

Finalement, l'application Ψ est bien un homéomorphisme.

■

On termine par donner le résultat utilisé sur la norme subordonnée :

Lemme 10 : [Rombaldi, p.654]
Pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $|\!|\!| M |\!|\!|_2 = \sqrt{\rho(M^*M)}$.

Preuve :
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Par la décomposition polaire, il existe deux matrices $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $H \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ tels que $M = UH$. De plus, U est une isométrie, donc pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a $\|Mx\|_2 = \|UHx\|_2 = \|Hx\|_2$ et ainsi $|||M|||_2 = |||H|||_2$.

Comme $H \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$, par le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $H = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$. De plus, si l'on note $(v_1, ..., v_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de H, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, on a :

$$\|Hx\|_2^2 = \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i v_i\right\|_2^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \|x_i v_i\|_2^2 \leq \rho(H)^2 \sum_{i=1}^n \|x_i v_i\|_2^2 = \rho(H)^2 \|x\|_2^2$$

On a donc $|||H|||_2 \leq \rho(H)$ et en considérant le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre (en module), on obtient $|||H|||_2 = \rho(H)$.

Or, $\sqrt{\rho(M^*M)} = \sqrt{\rho(H^*U^*UH)} = \sqrt{H^*H} = \sqrt{\rho(H^2)} = \sqrt{\rho(H)^2} = \rho(H)$ et ainsi on obtient donc $|||M|||_2 = |||H|||_2 = \rho(H) = \sqrt{\rho(M^*M)}$.

■

II.2 Pour aller plus loin...

II.2.1 Le cas réel

Le résultat du développement admet un analogue naturel dans le cas réel :

Théorème 11 :
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.2.2 Rayon spectral

Dans tout ce paragraphe, on rappelle uniquement quelques résultats de base sur le rayon spectral d'une matrice (ou de manière équivalente d'un endomorphisme) sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 12 : Rayon spectral [Rombaldi, p.654] :
On considère $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On appelle **rayon spectral de** M le réel $\rho(M) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|$.

Lemme 13 : [Rombaldi, p.654]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si M est une matrice normale, alors $|||M|||_2 = \rho(M)$.

Théorème 14 : [Rombaldi, p.656]
L'application ρ qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son rayon spectral est continue.

Théorème 15 : [Rombaldi, p.658]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* On a $\lim_{k \to +\infty} M^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
* Pour toute valeur initiale $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_{k+1} = Mx_k$ converge de limite le vecteur nul.
* On a $\rho(M) < 1$.
* Il existe au moins une norme matricielle induite telle que $|||M||| < 1$.
* La matrice $I_n - M$ est inversible et la série de terme général M^k est convergente de somme $(I_n - M)^{-1}$.
*La matrice $I_n - M$ est inversible et la série de terme général $\mathrm{Tr}\left(M^k\right)$ est convergente de somme $\mathrm{Tr}\left((I_n - M)^{-1}\right)$.
* On a $\lim_{k \to +\infty} \mathrm{Tr}\left(M^k\right) = 0$.

Théorème 16 : Théorème de Gelfand [Rombaldi, p.659] :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Quelle que soit la norme $|||\cdot|||$ choisie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(M) = \lim_{k \to +\infty} |||M^k|||^{\frac{1}{k}}$.

II.2.3 Bijection des nilpotents sur unipotents

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle.
On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on considère l'ensemble des matrices unipotentes $\mathcal{U}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } M - I_n \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})\}$.

Théorème 17 : [Rombaldi, p.768]
L'exponentielle matricielle induit une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.

Preuve :
On considère $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ et $\ln : \mathcal{U}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ définies pour tout $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ et $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ par $\exp(N) = P(N)$ et $\ln(U) = Q(U)$, où :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \text{ et } Q(X) = \sum_{k=1}^n \frac{(X-1)^k}{k}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x = \ln(\exp(x)) = (Q \circ P)(x) + o(x^n)$. Par unicité du développement limité d'une fonction, on en déduit qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $Q \circ P = X + X^{n+1}R(X)$. On a alors :

$$\forall N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K}),\ \ln(\exp(N)) = (Q \circ P)(N) = N + N^{n+1}R(N) = N$$

Ainsi, $\ln \circ \exp = \mathrm{Id}_{\mathcal{N}_n(\mathbb{K})}$ et on montre de même que $\exp \circ \ln = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}_n(\mathbb{K})}$.

Finalement, l'exponentielle matricielle induit une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.

■

Remarque 18 :
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors la bijection induite est un homéomorphisme, car l'application exponentielle et sa réciproque sont polynomiales.

II.3 Recasages

Recasages : 152 - 153 - 155 - 157 - 158.

III Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Probabilités*.